Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen

Anna Heynkes

4.11.2005, Aachen

Enthält eine Gleichung mehr als eine Variable, dann gibt es unendlich viele mögliche Lösungen und jede Lösung besteht aus so vielen Koordinaten, wie es Variablen zu berücksichtigen gibt. In solchen Fällen bestehen nämlich alle möglichen Lösungen aus Kombinationen dieser Variablen. Um trotz mehrerer Variablen eindeutige Lösungen zu bekommen, muss die Zahl der voneinander unabhängigen Gleichungen mindestens der Zahl der Variablen entsprechen. Man spricht von Gleichungssystemen und kennt dafür verschiedene Lösungsverfahren.

Inhaltsverzeichnis

1 Lineare Gleichungen mit zwei Variablen

Es gibt Situationen, in denen zwei Größen von einander abhängen. Hat man beispielsweise nur einen bestimmten Geldbetrag c zur Verfügung und soll davon zwei verschiedene Warensorten x und y mit den Stückpreisen a und b einkaufen, dann kann man von der einen umso mehr kaufen, je weniger man von der anderen nimmt. Mathematisch lässt sich das als lineare Gleichung mit zwei Variablen darstellen.

$$ax + by = c \tag{1}$$

Handhabbar wird die Beziehung beider Variablen x und y in nur einer Gleichung durch die Auflösung nach einer von beiden. So wird die eine Variable zu einer linearen Funktion der anderen. Durch diese Funktion wird jedem x-Wert ein y-Wert zugeordnet, sodass beide gemeinsam ein die Gleichung lösendes bzw. in eine wahre Aussage überführendes Zahlenpaar darstellen.

$$y = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x \Longleftrightarrow y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} \tag{2}$$

Der y-Achsenabschnitt entspricht dem Bruch $\frac{c}{b}$ und die Steigung der Geraden wird durch den Faktor $-\frac{a}{b}$ bestimmt.

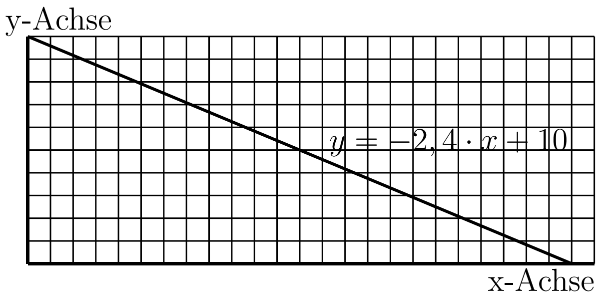
Benötigt man beispielsweise Bezin für 1,20 € und Mineralwasser für 50 Cent pro Liter und möchte dafür insgesamt nur 5 € ausgeben, dann lässt sich das mathematisch folgendermaßen ausdrücken:

$$y \cdot 0,5\,€ + x \cdot 1,2\,€ = 5\,€$$

Mittels Division durch 1 € und Auflösung nach y ergibt sich daraus die in Abbildung 1 grafisch dargestellt lineare Funktion:

$$\begin{aligned} & y \cdot 0,5\,€ + x \cdot 1,2\,€ = 5\,€ \\ \Longleftrightarrow\ & y \cdot 0,5 + x \cdot 1,2 = 5 \\ \Longleftrightarrow\ & y \cdot 0,5 = 5 - x \cdot 1,2 \\ \Longleftrightarrow\ & y = -2,4 \cdot x + 10 \end{aligned}$$

Abbildung 1: Alle möglichen Lösungen liegen auf einer Geraden



Wir haben einen y-Achsenabschnitt von 10 und eine Steigung von -2,4.

Alle möglichen Lösungen sind Wertepaare auf der gezeichneten Geraden.

1.1 Sonderfälle von linearen Gleichungen mit zwei Variablen

Ist in Gleichung 1 einer der beiden Faktoren a und b vor x oder y gleich Null, dann erhält man Geraden parallel zur x- oder zur y-Achse. Steht eine 0 vor dem x, dann wird y zu einer vom x-Wert unabhängigen Konstante und man bekommt eine Gerade parallel zur x-Achse. Trotzdem sprechen die Mathematiker von einer Funktionsgleichung. Steht eine 0 vor dem y-Wert, dann wird umgekehrt x zu einer vom y-Wert unabhängigen Konstante und man bekommt eine Gerade parallel zur y-Achse. Eine solche Gleichung vom Typ x = k ist keine Funktionsgleichung.

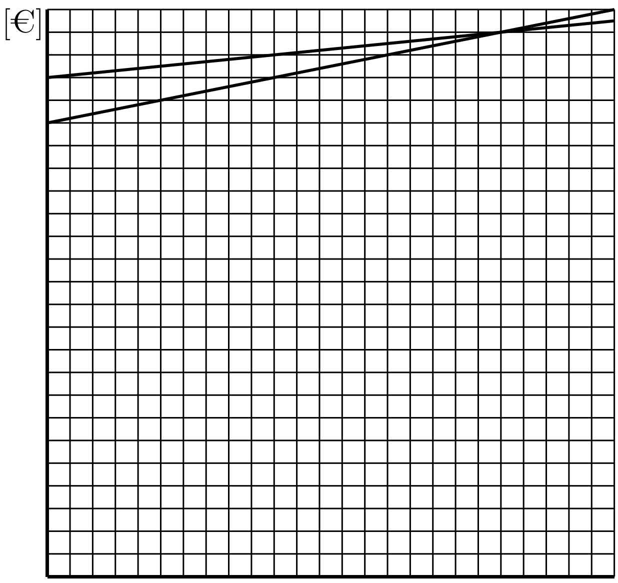
2 Systeme linearer Gleichungen mit zwei Variablen

Kann man für zwei Variablen nur eine Gleichung nennen, dann lässt sich dadurch eigentlich nur ihr Verhältnis zueinander festlegen. Lösungen sind dann alle Wertepaare, die für Punkte auf der von der Gleichung beschriebenen Geraden stehen. Ganz anders ist aber die Situation, wenn zwei Variablen gleichzeitig zwei Gleichungen mit unterschiedlichen Steigungen lösen müssen. Als Lösung kommt dann nämlich nur der Schnittpunkt und damit nur ein einziges Wertepaar in Frage. Derart miteinander verbundene Gleichungen nennt man Gleichungssysteme. Haben allerdings beide Gleichungen eines linearen Gleichungssystems die selbe Steigung, dann gibt es entweder keine (bei Parallelen) oder unendlich viele Lösungen (wenn die Geraden aufeinander liegen). Zeichnerisch ist der Lösungsweg leicht zu verstehen, wenn auch nicht immer ganz leicht umsetzbar.

2.1 grafisches Lösungsverfahren

Lassen sich zwei Variablen durch zwei Gleichungen unterschiedlicher Steigung und gemeinsamem Schnittpunkt charakteriesieren, dann muss man nur beide Geraden in ein Koordinatensystem einzeichnen, um die ungefähren Koordinaten des Schnittpunktes und damit die Lösung ablesen zu können.

Abbildung 2: Das grafische Lösungsverfahren



Zum Zeitpunkt der bei beiden Tarifen gleich teuren Gesprächsdauer sind x und y in beiden Tarif-Gleichungen identisch. Dabei steht die Variable x für die vertelefonierte Zeit in Minuten, während die abhängige Variable y für den zu zahlenden Preis steht.

$$\left| \begin{array}{l} y = x \cdot 2\,Cent + 20\,€ \\ y = x \cdot 1\,Cent + 22\,€ \end{array} \right|$$

Die aus der Grafik als Schnittpunkt abgelesene und durch Einsetzen bestätigte Lösung ist das Zahlenpaar $(200 Min.|24\,€)$.

Wie man sieht, ist das Beispiel völlig unrealistisch, weil bei Rheinländern schon ein einziges Telefonat locker länger als 3 Stunden und 20 Minuten dauern kann. Um nicht zu viel Geld zu verschenken, würden Telefongesellschaften beim Rheinländertarif die Grundgebühr sicher deutlich höher ansetzen, aber dann hätte das grafische Lösungsverfahren bei ausreichender Auflösung ein Doppelblatt erfordert. Genau dieser Platzbedarf ist auch einer der Nachteile dieses Verfahrens.

Böte beispielsweise eine Telefongesellschaft neben einem Normaltarif mit einer Grundgebühr von monatlich 20 Euro und 2 Cent pro Minute noch einen speziellen Rheinländer-Tarif mit einer Grundgebühr von 22 Euro und einem Minutenpreis von 1 Cent an, dann ließe sich eindeutig ermitteln, wie lange eine Quasselstrippe mindestens telefonieren müsste, damit sich der Rheinländer-Tarif auch lohnt. Man muss nur beide Tarife mathematisch beschreiben und übereinander zeichnen.

2.2 mathematische Lösungsverfahren

Weniger leicht nachvollziehbar als das grafische sind die mathematischen Lösungsverfahren. Beim Gleichsetzungsverfahren werden zwei Geradengleichungen gleichgesetzt, sodass sie beide erfüllt werden müssen, damit die kombinierte Gleichung lösbar ist. Das Einsetzungsverfahren und auch das Additionsverfahren sind nur Modifikationen des Gleichsetzungsverfahrens, funktionieren also nach dem selben Prinzip, obwohl man es bei diesen Verfahren nicht so leicht erkennt.

2.2.1 Gleichsetzungsverfahren

Wenn ein lineares Gleichungssystem zwei sich kreuzende Geraden beschreibt, dann gibt es genau eine Lösung des Gleichungssystems - den Schnittpunkt. An diesem Punkt sind die x- und die y-Koordinate auf beiden Geraden identisch. Löst man beide Geradengleichungen nach x oder y auf, dann gilt für den Schnittpunkt, dass an dieser Stelle nicht nur das x oder y in beiden Geradengleichungen gleich ist. Auch die jeweils andere Seite der Gleichung ist in beiden Fällen am Schnittpunkt identisch. Deshalb darf man die nur noch eine Variable enthaltenden Gleichungsseiten gleichsetzen. So wird aus dem schon in Kapitel 2.1 auf der vorherigen Seite als Beispiel verwendeten Gleichungssystem:

$$\left| \begin{array}{l} y = x \cdot 2\ Cent + 20\,€ \\ y = x \cdot 1\ Cent + 22\,€ \end{array} \right|$$

die Gleichung:

$$x \cdot 2\ Cent + 20\,€ = x \cdot 1\ Cent + 22\,€$$

Diese Gleichung löst man einfach nach x auf:

$$\begin{array}{ll} \Longleftrightarrow & x \cdot 0,02\ € + 20\,€ = x \cdot 0,01\ € + 22\,€ \\ \Longleftrightarrow & x \cdot 0,02 + 20 = x \cdot 0,01 + 22 \\ \Longleftrightarrow & (0,02 - 0,01) \cdot x = 22 - 20 \\ \Longleftrightarrow & 0,01 \cdot x = 2 \\ \Longleftrightarrow & x = \frac{2}{0,01} \\ \Longleftrightarrow & x = 200 \end{array}$$

Nun kann man den x-Wert 200 in eine oder zur Kontrolle besser in beide Geradengleichungen des Gleichungssystems einsetzen:

$$\begin{array}{llll} & y = x \cdot 2\ Cent + 20\,€ & & y = x \cdot 1\ Cent + 22\,€ \\ \Longleftrightarrow & y = 200 \cdot 2\ Cent + 20\,€ & \Longleftrightarrow & y = 200 \cdot 1\ Cent + 22\,€ \\ \Longleftrightarrow & y = 400\ Cent + 20\,€ & \Longleftrightarrow & y = 200\ Cent + 22\,€ \\ \Longleftrightarrow & y = 24\,€ & \Longleftrightarrow & y = 24\,€ \end{array}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems ist daher genau wie schon grafisch ermittelt das Wertepaar ($200 Min.|24$ €), dem einzigen Element der Lösungsmenge $L = \{(200|24)\}$.

Wenn es einfacher ist, dann kann man im ersten Schritt auch beide Gleichungen nach x auflösen. Außerdem muss man die Auflösung nach einer Variablen nicht unbedingt vollständig durchführen. Es reicht völlig aus, wenn auf der einen Seite der Gleichung nur eine Variable in einem Term steht, welcher in beiden Gleichungen identisch ist. Dann nämlich kann man davon ausgehen, dass auch die andere Seite der Gleichung zumindest am Schnittpunkt beider Geraden in beiden Geradengleichungen den selben Wert besitzen.

$$\left| \begin{array}{l} 5x - 2 = 2y + 5 \\ 5x - 2 = 3y - 4 \end{array} \right| \qquad 2y + 5 = 3y - 4 \Longleftrightarrow -y = -9 \Longleftrightarrow y = 9$$

2.2.2 Einsetzungsverfahren

Ein gewisses Problem des Gleichsetzungsverfahrens ist es, dass bei der Auflösung nach einer der beiden Variablen auf der anderen Seite der Gleichung ein unangenehmer Term entstehen kann. Wenn dieses Problem droht und gleichzeitig eine der beiden Variablen in einer der beiden Gleichungen bereits weitgehend isoliert dasteht, dann empfiehlt sich als Alternative das sogenannte Einsetzungsverfahren. Dabei setzt man einfach den der isolierten Variablen entsprechenden Term auf der anderen Seite der Gleichung für diese Variable in die andere Gleichung ein.

Das Einsetzungsverfahren empfiehlt sich auch dann, wenn die eine Gleichung stark nach der einen, die andere aber schon fast vollständig nach der anderen Variablen aufglöst ist. In solchen Fällen wäre es schlicht zu aufwändig, die Auflösung nach einer Variablen bei einer der beiden Gleichungen völlig umzukrempeln.

Im Grunde ist das Einsetzungsverfahren eine Optimierung des Gleichsetzungsverfahrens, weil es die Umformung nur einer der beiden Gleichungen erfordert.

$$\left| \begin{array}{l} 0,02x = y - 20 \\ y = 0,01x + 22 \end{array} \right| \Longleftrightarrow 0,02x = 0,01x + 22 - 20 \Longleftrightarrow 0,01x = 2 \Longleftrightarrow x = 200$$

Anschließend ermittelt man wie gewohnt die andere Variable durch Einsetzen der gerade ermittelten Variablen in eine der beiden Gleichungen des Gleichungssystems.

$$y = 0,01x + 22 \Longleftrightarrow y = 0,01 \cdot 200 + 22 \Longleftrightarrow y = 2 + 22 \Longleftrightarrow y = 24$$

2.2.3 Additionsverfahren

Vom Additionsverfahren gibt es zwei Varianten, von denen die leichter als Weiterentwicklung des Gleichsetzungsverfahrens erkennbare auch Subtraktionsverfahren genannt wird. Um das Subtraktionsverfahren anwenden zu können, bringt man am besten in beiden Gleichungen beide Variablen auf die linke Seite. Unser Rheinländer-Beispiel bleibt trotzdem unverkennbar.

$$\left| \begin{array}{l} y - 0,02x = 20 \\ y - 0,01x = 22 \end{array} \right|$$

Subtrahiert man nun die untere von der oberen Gleichung, dann fällt das y weg und man macht im Grunde nichts anderes als die Gleichsetzung zweier nach y aufgelöster Gleichungen. Man spart sich nur die Auflösung nach y und fasst außerdem mit der Subtraktion auch gleich die Koeffizienten von x sowie die Konstanten auf der rechten Seite zusammen.

$$\left| \begin{array}{c} y - 0,02x = 20 \\ y - 0,01x = 22 \end{array} \right| \Rightarrow -0,01x = -2 \Longleftrightarrow x = 200$$

Danach wird wie immer y durch Einsetzen von x in eine oder beide Gleichungen des Gleichungssystems ermittelt.

Das Additionsverfahren im engeren Sinne unterscheidet sich vom Subtraktionsverfahren nur dadurch, dass die beiden Gleichungen addiert werden, anstatt sie voneinander zu subtrahieren. Im Grunde ist das aber dasselbe, weil die Subtraktion nichts anderes ist als eine Addition nach der Multiplikation der unteren Gleichung mit -1.

$$\left| \begin{array}{c} y - 0,02x = 20 \\ -y + 0,01x = -22 \end{array} \right| \Rightarrow -0,01x = -2 \Longleftrightarrow x = 200$$

Wenn es besser passt - oder jetzt auch einmal zu Demonstrationszwecken - kann man mit dem Additionsverfahren auch das x mit seinem Koeffizienten wegaddieren oder subtrahieren und zuerst die y-Koordinate errechnen.

$$\left| \begin{array}{c} y - 0,02x = 20 \\ 2y - 0,02x = 44 \end{array} \right| \Rightarrow -y = -24 \Longleftrightarrow y = 24$$

Anschließend kann man x durch Einsetzen von y in mindestens eine Gleichung des Gleichungssystems errechnen.

$$\begin{array}{llll} & y = 0,02x + 20 & & y = 0,01x + 22 \\ \Longleftrightarrow & 24 = 0,02x + 20 & \Longleftrightarrow & 24 = 0,01x + 22 \\ \Longleftrightarrow & 4 = 0,02x & \Longleftrightarrow & 2 = 0,01x \\ \Longleftrightarrow & x = 200 & \Longleftrightarrow & x = 200 \end{array}$$