Geradengleichungen

Anna Heynkes

21.9.2005, Aachen

Wegen des Überspringens einer Jahrgangsstufe habe ich den Mathematik-Unterricht verpasst, in dem die Geradengleichungen behandelt wurden. Deshalb musste ich mir nun etwas verspätet diesen Stoff im Selbststudium aneignen. Glücklicherweise findet man im World Wide Web sehr viel darüber, und natürlich habe ich auch noch mein Mathebuch. Die Erklärungen sind im Internet oft verständlicher und genauer, aber sie gehen meistens weit über die Lehrpläne hinaus, auf deren Inhalt sich die Schulbücher beschränken. Da ich kein Mathegenie bin und keinen entsprechenden Leistungskurs anstrebe, begnüge auch ich mich in meinem Text mit dem, was ich laut Mathebuch wissen sollte. Ich versuche es nur so knapp wie möglich und so ausführlich wie nötig darzustellen, um es möglichst leicht und schnell wiederholen zu können.

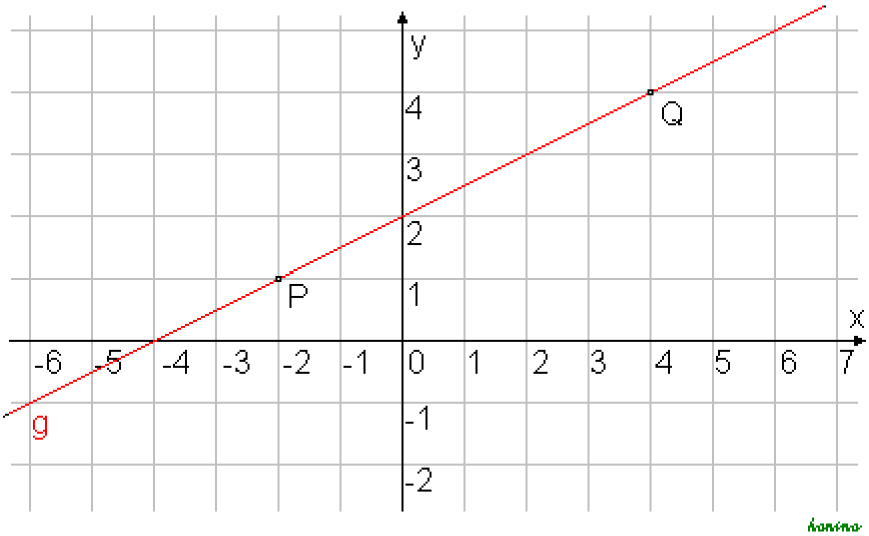
Zur Veranschaulichung brauche ich einige Grafiken und bin daher sehr froh, dass man die der freien Enzyklopädie Wikipedia entnehmen darf. So musste ich nicht jede Skizze mühsam selber zeichnen, was mir auch sicher nicht so gut gelungen wäre. Den uneigennützigen Zeichner (ein Doktor der Physik) kann ich nicht persönlich zitieren, da er anonym an der Wikipedia mitwirkte.

Normalerweise schreibe ich meine Texte in HTML, weil man damit Sprungverweise einfacher und besser als mit TEX und pdf-Dateien realisieren kann. Aber in diesem Text brauche ich Bruch und Wurzel, die sich immer noch nicht vernünftig mit HTML darstellen lassen. Also benutze ich diesmal TEX, obwohl dadurch der Umgang mit Links etwas problematisch wird. Am besten funktioniert es, wenn man zum Lesen den kostenlosen Acrobat Reader verwendet.

Inhaltsverzeichnis

1 Geradengleichungen im Allgemeinen

In der Mathematik nennt man eine Gleichung Geradengleichung, wenn sie eine Gerade eindeutig beschreibt. Die Abbildung 1 zeigt eine Gerade g durch zwei gegebene Punkte P und Q in einem sogenannten kartesischen[1] Koordinatensystem. Durch zwei voneinander verschiedene Punkte lässt sich[2] immer genau eine Gerade zeichnen.



Die Gerade g verläuft durch die Punkte P und Q.

Diese Grafik stammt aus der Wikipedia.

Abbildung 1: Gerade in einem Koordinatensystem

Mathematisch beschreiben lässt sich so eine Gerade durch verschiedene Formen von Geradengleichungen, die aber alle ineinander umgewandelt werden können.

2 Die Normalform

Man kann eine Gerade eindeutig beschreiben, indem man ihre Steigung m beschreibt und den Punkt b festlegt, an dem die Gerade die Y-Achse schneidet. Diesen Punkt nennt man den Y-Achsenabschnitt. Diese Art der Festlegung einer Geraden nennt mein Mathematikbuch Normalform, während sie in der Wikipedia Koordinatenform heißt. Die allgemeine Geradengleichung in der Normalform lautet in meinem Mathematikbuch von Schroedel:

$$y = m \cdot x + b \tag{1}$$

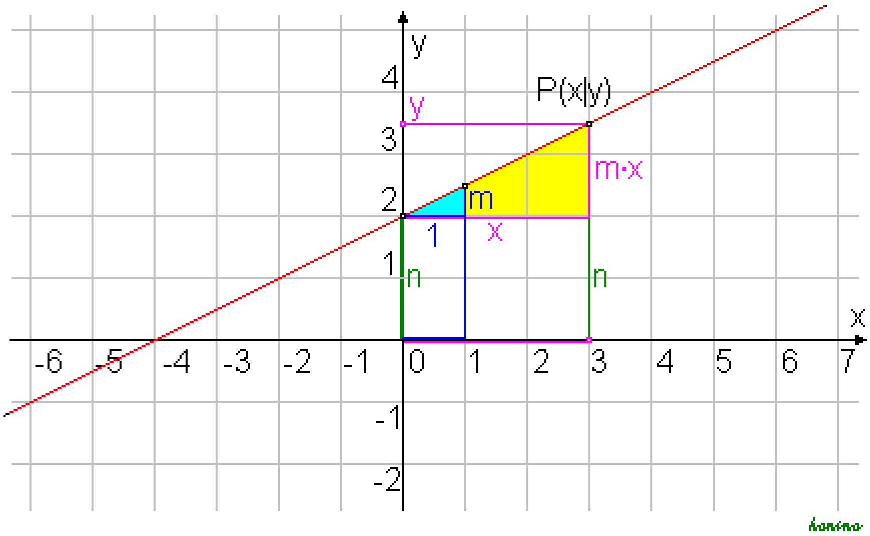
m ist die Steigung der Geraden.

b ist der y-Achsenabschnitt, also die Verschiebung der Geraden entlang der y-Achse relativ zum Ursprung des Koordinatensystems.

x und y sind Platzhalter für die Koordinatenwerte aller Punkte, welche die Geradengleichung erfüllen und deshalb auf der Gerade liegen.

[1] Das nach seinem Erfinder René Descartes benannte kartesische Koordinatensystem ist ein rechtwinkliges Koordinatensystem, in dem die Abstände zwischen den Koordinatenlinien konstant bleiben.
[2] zumindest in der normalen Schulgeometrie, die man auch euklidische Geometrie nennt

Man kann natürlich diese Geradengleichung auch mit anderen Buchstaben schreiben, wie das z.B. in der Wikipedia geschieht, wo der y-Achsenabschnitt im Text mit einem q und in der Grafik durch eine Strecke n dargestellt wird.



Die Gerade schneidet die y-Achse auf der Höhe n und steigt oder fällt pro Einheit auf der x-Achse um den Wert m. Die Höhe n in dieser Grafik entspricht dem y-Achsenabschnitt b in Gleichung 1 auf der vorherigen Seite. Auch diese Grafik stammt aus der Wikipedia.

Abbildung 2: Veranschaulichung der Normalformgleichung

Die Steigung m ist die senkrechte Kathete des (blau gefärbten) Steigungsdreiecks, dessen waagerechte Kathete 1 ist. Wird diese auf das x-fache vergrößert (gelbes Dreieck), dann vergrößert sich nach dem zweiten Strahlensatz auch die senkrechte Kathete auf das x-fache ($m \cdot x$). Die Grafik zeigt auch, dass zum Produkt aus X-Wert und Steigung m noch der y-Achsenabschnitt n bzw. b hinzu kommt. Ein Punkt P mit der x-Koordinate x hat demnach eine y-Koordinate, die nach der folgenden Formel (der Normalform) berechnet wird:

$$y = m \cdot x + b \qquad bzw. \qquad y = m \cdot x + n$$

Im Beispiel der Abbildung 2 entspricht die Normalform konkret der Gleichung:

$$y = \frac{1}{2} \cdot x + 2$$

3 Die Zwei-Punkte-Form

Wenn von einer Geraden der Wert der Steigung nicht bekannt ist, dann benötigt man die Koordinaten zweier Punkte P_1 und P_2, um die Gerade zu definieren. Hat man zwei Punkte, dann kann man mit ihren Koordinaten die Steigung einer Gerade errechnen. Dazu berechnet man die positive oder negative Änderung des y-Wertes Δy auf der Strecke Δx zwischen den beiden Punkten $P_1(x_1|y_1)$ und $P_2(x_2|y_2)$.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad bzw. \qquad m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \tag{2}$$

Nach dem zweiten Strahlensatz gilt das selbe Verhältnis auch für jeden anderen Punkt auf der Geraden, die natürlich überall die selbe Steigung besitzt.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_1}{x - x_1} \qquad bzw. \qquad m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} \tag{3}$$

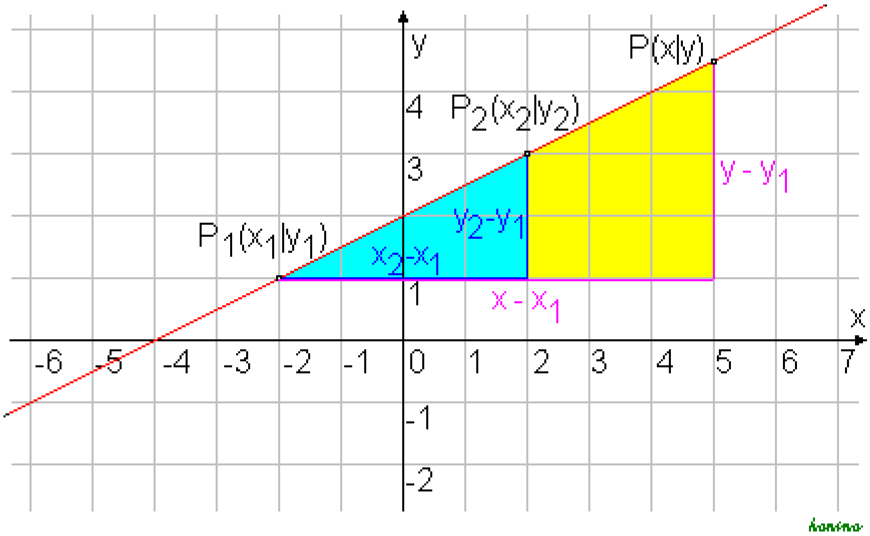
Da nun in beiden Gleichungen 2 und 3 auf der vorherigen Seite auf der linken Seite die selbe Steigung m steht, kann man die rechten Seiten beider Gleichungen gleichsetzen.

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad bzw. \qquad \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \tag{4}$$

Wenn man die Gleichung 4 nun noch nach y umformt, dann erhält man die sogenannte Zwei-Punkte-Form.

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) \qquad bzw. \qquad y_1 - y = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot (x_1 - x) \tag{5}$$

In diese Gleichung 5 kann man die x- und y-Koordinaten der beiden bekannten Punkte P1 und P2 einsetzen und für jeden x-Wert den dazu gehörigen y-Wert berechnen.



Zwei bekannte Punkte P_1 und P_2 erlauben die Berechnung jedes unbekannten Punktes P.
Auch diese Grafik stammt aus der Wikipedia.

Abbildung 3: Veranschaulichung der Zwei-Punkte-Form

4 Die Punkt-Steigungs-Form

Der Bruch in der Gleichung 5 entspricht genau der Steigung m in Gleichung 2 auf der vorherigen Seite. Man kann daher die Gleichung 5 auch etwas übersichtlicher schreiben.

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1) \qquad bzw. \qquad y_1 - y = m \cdot (x_1 - x) \tag{6}$$

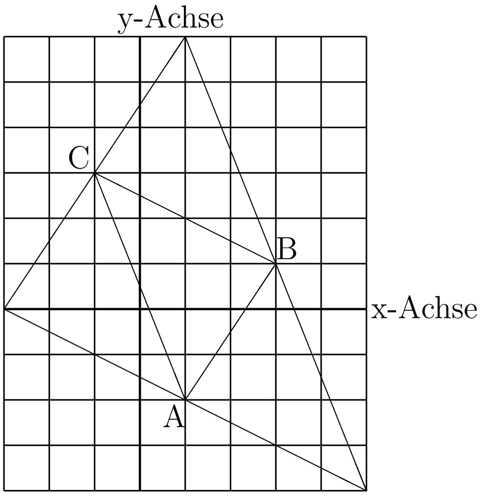
Man nennt diese Gleichung die Punkt-Steigungs-Form und kann damit die Koordinaten unbekannter Punkte auf einer Geraden berechnen, wenn von dieser nur ein Punkt und die Steigung bekannt sind. Dies kann der Fall sein, wenn nur ein Punkt einer Geraden bekannt ist, die parallel zu einer anderen Geraden mit bekannter oder zumindest berechenbarer Steigung liegt.

Parallel sind zwei Geraden g_1 und g_2, wenn ihre Steigungen m_1 und m_2 identisch sind. Senkrecht (orthogonal) zueinander stehen zwei Geraden, wenn die Steigung m_1 der einen Geraden dem negativen Kehrwert der anderen entspricht ($m_1 = -1/m_2$).

5 Anwendungen in Hausaufgaben

5.1 Hausaufgabe vom 20.9.2005

Abbildung 4: Skizze mit gegebenen und gesuchten Punkten und Geraden



Gegeben waren die Punkte A(1|-2), B(3|1) und C(-1|3) eines Dreiecks.

Bestimmt werden sollten die Gleichungen der parallel zu den jeweils gegenüber liegenden Geraden durch diese drei Punkte gehenden Geraden. Gesucht wurden außerdem die Schnittpunkte der drei äußeren Geraden.

Diese Grafik ist mit TEX selbst gezeichnet.

Lösungsstrategie:

Im Prinzip bekannt sind von jeder der drei gesuchten Geraden ein Punkt sowie indirekt die Steigung, die allerdings erst noch mit Hilfe der beiden Endpunkte der jeweils gegenüberliegenden und parallel zur gesuchten verlaufenden Geraden berechnet werden muß. Die gesuchten Geraden können dann mit Geradengleichungen der Punkt-Steigungsform definiert werden. Die Schnittpunkte der drei gesuchten Geraden erhält man durch Gleichsetzung von jeweils zwei nach y aufgelösten Geradengleichungen, weil diese am Schnittpunkt identische x- und y-Werte besitzen. So erhält man die gemeinsame x-Koordinate, die man dann in die beiden Geradengleichungen einsetzen kann. Dadurch lässt sich auch der dazu gehörige y-Wert berechnen.

Durchführung:

Da die gesuchten Geraden a, b und c die selben Steigungen wie die jeweils gegenübe liegenden Geraden zwischen den Punkten A, B und C besitzen, kann man mit der Formel

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

zunächst diese Steigungen ermitteln:

$$m(a) = m(\overline{CB}) = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{1-3}{3+1} = \frac{-2}{4} = -0,5$$

$$m(b) = m(\overline{CA}) = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{-2-3}{1+1} = \frac{-5}{2} = -2,5$$

$$m(c) = m(\overline{AB}) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1+2}{3-1} = \frac{3}{2} = 1,5$$

Alternativ kann man die Steigungen ebenso gut mit der Formel:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

ermitteln:

$$m(a) = m(\overline{BC}) = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{3-1}{-1-3} = \frac{2}{-4} = -0,5$$

$$m(b) = m(\overline{AC}) = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{3+2}{-1-1} = \frac{5}{-2} = -2,5$$

$$m(c) = m(\overline{BA}) = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{-2-1}{1-3} = \frac{-3}{-2} = 1,5$$

Nach Einsetzung der vorab ermittelten Steigungen in die Punkt-Steigungsform

$$g : y - y_1 = m(x - x_1)$$

erhält man vereinfachte Geradengleichungen in der Normalform:

$$g_A : y - y_A = m_a(x - x_A)$$

$$\Longleftrightarrow y + 2 = -0,5(x-1) \Longleftrightarrow y = -0,5x + 0,5 - 2 \Longleftrightarrow y = -0,5x - 1,5$$

$$g_B : y - y_B = m_b(x - x_B)$$

$$\Longleftrightarrow y - 1 = -2,5(x-3) \Longleftrightarrow y = -2,5x + 7,5 + 1 \Longleftrightarrow y = -2,5x + 8,5$$

$$g_C : y - y_C = m_c(x - x_C)$$

$$\Longleftrightarrow y - 3 = 1,5(x+1) \Longleftrightarrow y = 1,5x + 1,5 + 3 \Longleftrightarrow y = 1,5x + 4,5$$

Weil jeweils zwei benachbarte Geraden einen Schnittpunkt mit dem selben y-Wert besitzen, kann man jeweils zwei Gleichungen gleichsetzen und den x-Wert am Schnittpunkt ermitteln:

Schnittpunkt der Geraden g_A und g_B $(g_A \cap g_B)$:

$$-0,5x - 1,5 = -2,5x + 8,5 \Longleftrightarrow -0,5x + 2,5x = 8,5 + 1,5 \Longleftrightarrow 2x = 10 \Longleftrightarrow x = 5$$

Schnittpunkt der Geraden g_B und g_C $(g_B \cap g_C)$:

$$-2,5x + 8,5 = 1,5x + 4,5 \Longleftrightarrow -2,5x - 1,5x = 4,5 - 8,5 \Longleftrightarrow -4x = -4 \Longleftrightarrow x = 1$$

Schnittpunkt der Geraden g_C und g_A $(g_C \cap g_A)$:

$$1,5x + 4,5 = -0,5x - 1,5 \Longleftrightarrow 1,5x + 0,5x = -1,5 - 4,5 \Longleftrightarrow 2x = -6 \Longleftrightarrow x = -3$$

Einsetzen der drei x-Werte in die jeweils zwei benachbarten Geradengleichungen liefert jeweils identische y-Werte:

Schnittpunkt der Geraden g_A und g_B $(g_A \cap g_B)$:

$$y = -0,5x - 1,5 \Longleftrightarrow y = -0,5 \cdot 5 - 1,5 \Longleftrightarrow y = -2,5 - 1,5 \Longleftrightarrow y = -4$$

$$y = -2,5x + 8,5 \Longleftrightarrow y = -2,5 \cdot 5 + 8,5 \Longleftrightarrow y = -12,5 + 8,5 \Longleftrightarrow y = -4$$

Die Koordinaten des Schnittpunktes $g_A \cap g_B$ sind also $S_{g_A g_B}(5|-4)$

Schnittpunkt der Geraden g_B und g_C $(g_B \cap g_C)$:

$$y = -2,5x + 8,5 \Longleftrightarrow y = -2,5 \cdot 1 + 8,5 \Longleftrightarrow y = -2,5 + 8,5 \Longleftrightarrow y = 6$$

$$y = 1,5x + 4,5 \Longleftrightarrow y = 1,5 \cdot 1 + 4,5 \Longleftrightarrow y = 1,5 + 4,5 \Longleftrightarrow y = 6$$

Die Koordinaten des Schnittpunktes $g_B \cap g_C$ sind also $S_{g_B g_C}(1|6)$

Schnittpunkt der Geraden g_C und g_A $(g_C \cap g_A)$:

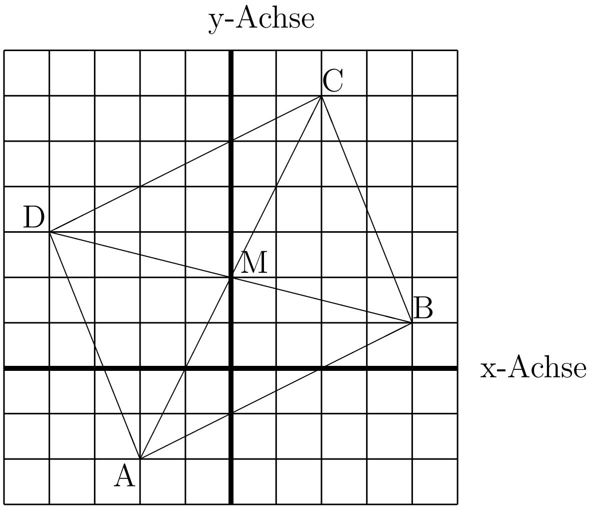
$$y = 1,5x + 4,5 \Longleftrightarrow y = 1,5 \cdot -3 + 4,5 \Longleftrightarrow y = -4,5 + 4,5 \Longleftrightarrow y = 0$$

$$y = -0,5x - 1,5 \Longleftrightarrow y = -0,5 \cdot -3 - 1,5 \Longleftrightarrow y = 1,5 - 1,5 \Longleftrightarrow y = 0$$

Die Koordinaten des Schnittpunktes $g_C \cap g_A$ sind also $S_{g_C g_A}(-3|0)$

5.2 Hausaufgabe 1 vom 21.9.2005

Abbildung 5: Skizze mit allen gegebenen und gesuchten Punkten



Gegeben waren die Punkte A(-2|-2), B(4|1) und C(2|6) eines Parallelogramms.

Bestimmt werden sollten der Punkt D sowie der Schnittpunkt M der beiden Diagonalen.

Diese Grafik ist mit TEX selbst gezeichnet.

Lösungsstrategie zur Ermittlung des Punktes D:

Der Punkt D ist der Schnittpunkt der Geraden $\overline{AD}$ und $\overline{DC}$, von denen aber nur die Punkte A bzw. C bekannt sind. Glücklicherweise lassen sich zusätzlich die Steigungen der Geraden $\overline{AD}$ und $\overline{DC}$ bestimmen, weil sie in dem Parallelogramm genau den Steigungen der gegenüber liegenden Geraden $\overline{BC}$ und $\overline{AB}$ entsprechen. Mit jeweils einem Punkt und der Steigung lassen sich mittels Punkt-Steigungs-Form die beiden zunächst unbekannten Geraden darstellen. Nimmt man nun an, daß der Punkt D der Schnittpunkt dieser beiden Geraden ist, dann müssen sie an diesem Punkt den selben y-Wert besitzen. Also kann man die die beiden nach y aufgelösten Geradengleichungen an diesem Punkt gleichsetzen und nach x auflösen. So erhält man den x-Wert des Punktes D. Setzt man den x-Wert in die beiden Geradengleichungen ein, dann muß man in beiden Geradengleichungen den selben y-Wert für den Punkt D erhalten.

Durchführung:

Da in dem Parallelogramm die Geraden $g_{\overline{DC}}$ und $g_{\overline{AB}}$ sowie die Geraden $g_{\overline{AD}}$ und $g_{\overline{BC}}$ jeweils identische Steigungen besitzen, kann man mit der Formel

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

zunächst diese Steigungen ermitteln:

$$m(\overline{DC}) = m(\overline{AB}) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1+2}{4+2} = \frac{3}{6} = 0,5$$

$$m(\overline{AD}) = m(\overline{BC}) = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{1-6}{4-2} = \frac{-5}{2} = -2,5$$

Nach Einsetzung der vorab ermittelten Steigungen in die Punkt-Steigungsform

$$g : y - y_1 = m(x - x_1)$$

erhält man vereinfachte Geradengleichungen in der Normalform:

$$g_{\overline{DC}} : y - y_1 = m(x - x_1) \qquad g_{\overline{AD}} : y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\Longleftrightarrow y - 6 = 0,5 \cdot (x - 2) \qquad \Longleftrightarrow y + 2 = -2,5 \cdot (x + 2)$$

$$\Longleftrightarrow y = 0,5x - 1 + 6 \qquad \Longleftrightarrow y = -2,5x - 5 - 2$$

$$\Longleftrightarrow y = 0,5x + 5 \qquad \Longleftrightarrow y = -2,5x - 7$$

Weil die beiden Geraden am Schnittpunkt den selben y-Wert besitzen, kann man beide Gleichungen gleichsetzen und den x-Wert ermitteln:

$$g_{\overline{DC}} \cap g_{\overline{AB}} : 0,5x + 5 = -2,5x - 7 \Longleftrightarrow 3x = -12 \Longleftrightarrow x = -4$$

Einsetzen des x-Wertes in die beiden Geradengleichungen liefert die identischen y-Werte:

$$g_{\overline{DC}} : y = 0,5x + 5 \Longleftrightarrow y = 0,5 \cdot (-4) + 5 \Longleftrightarrow y = -2 + 5 \Longleftrightarrow y = 3$$

$$g_{\overline{AD}} : y = -2,5x - 7 \Longleftrightarrow y = -2,5 \cdot (-4) - 7 \Longleftrightarrow y = 10 - 7 \Longleftrightarrow y = 3$$

Die Koordinaten des gesuchten Punktes sind also $D(-4|3)$.

Lösungsstrategie zur Ermittlung des Schnittpunktes M der beiden Diagonalen:

Von den Diagonalen $\overline{DB}$ und $\overline{AB}$ sind jeweils beide Endpunkte bekannt. Daher lassen sich diese Diagonalen durch Geradengleichungen der Zwei-Punkte-Form darstellen. Am Schnittpunkt müssen beide Geradengleichungen den selben y-Wert teilen, weshalb man die nach y aufgelösten Gleichungen gleichsetzen und nach x auflösen kann. Setzt man den so ermittelten x-Wert in beide Geradengleichungen ein, dann erhält man in beiden den selben y-Wert für den Schnittpunkt M.

Durchführung:

Nach Einsetzung der bekannten Koordinaten $(x_1|y_1$ und $(x_2|y_2)$ in die Zwei-Punkte-Form

$$g : y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

erhält man vereinfachte Geradengleichungen in der Normalform:

$$g_{\overline{DB}} : y - y_D = \frac{y_B - y_D}{x_B - x_D}(x - x_D) \qquad g_{\overline{AC}} : y - y_A = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}(x - x_A)$$

$$\Longleftrightarrow y - 3 = \frac{1-3}{4+4}(x+4) \qquad \Longleftrightarrow y + 2 = \frac{6+2}{2+2}(x+2)$$

$$\Longleftrightarrow y = \frac{-2}{8} \cdot (x+4) + 3 \qquad \Longleftrightarrow y = \frac{8}{4} \cdot (x+2) - 2$$

$$\Longleftrightarrow y = -0,25 \cdot (x+4) + 3 \qquad \Longleftrightarrow y = 2 \cdot (x+2) - 2$$

$$\Longleftrightarrow y = -0,25x - 1 + 3 \qquad \Longleftrightarrow y = 2x + 4 - 2$$

$$\Longleftrightarrow y = -0,25x + 2 \qquad \Longleftrightarrow y = 2x + 2$$

Weil die beiden Geraden am Schnittpunkt den selben y-Wert besitzen, kann man beide Gleichungen gleichsetzen und den x-Wert ermitteln:

$$g_{\overline{DB}} \cap g_{\overline{AC}} :$$

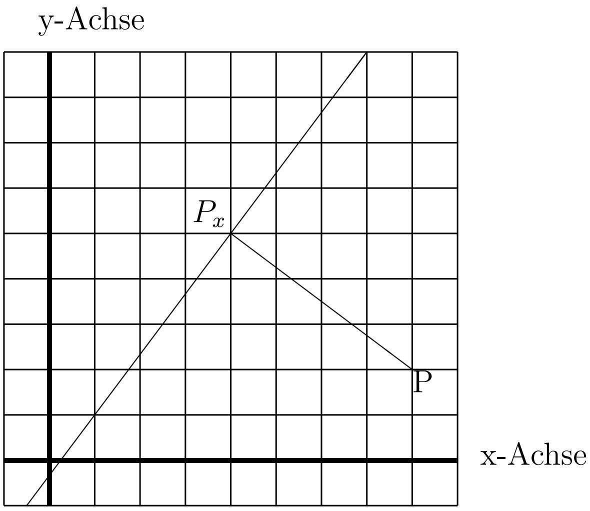
$$\Longleftrightarrow -0,25x + 2 = 2x + 2 \Longleftrightarrow -0,25x - 2x = 2 - 2 \Longleftrightarrow -2,25x = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

Einsetzen des x-Wertes in die beiden Geradengleichungen liefert die identischen y-Werte:

$$y = -0,25 \cdot 0 + 2 \Longleftrightarrow y = 2 \qquad y = 2 \cdot 0 + 2 \Longleftrightarrow y = 2$$

Demnach hat der Schnittpunkt der beiden Diagonalen die Koordinaten M(0|2)

5.3 Hausaufgabe 2 vom 21.9.2005



Gegeben waren eine Geradengleichung $g : y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$ und ein Punkt P(8|2).

Bestimmt werden sollte der Abstand zwischen der Geraden g und dem Punkt P.

Diese Grafik ist mit TEX selbst gezeichnet.

Abbildung 6: Die gegebenen und gesuchten Punkte und Geraden

Lösungsstrategie:

Gemeint mit dem Abstand zwischen der Geraden g und dem Punkt P ist der kürzest mögliche Abstand, welcher einer senkrecht auf der Geraden g stehenden Geraden a zwischen dem Punkt P und der Geraden g entspricht. Da die gesuchte Gerade a senkrecht auf der bekannten Geraden g steht, entspricht die Steigung der unbekannten dem negativen

Kehrwert der bekannten Steigung, also $m = -3/4$. Nun lässt sich die Abstandsgerade a durch eine Geradengleichung der Punkt-Steigungs-Form darstellen und im Schnittpunkt P_x mit der in der Normalform vorgegebenen Geradengleichung g gleichsetzen, weil an diesem Schnittpunkt P_x die y-Werte identisch sein müssen. Durch Einsetzen des ermittelten x-Wertes in beide Gleichungen erhält man den Schnittpunkt P_x auf der vorgegebenen Geraden g. Danach lässt sich der Abstand zwischen beiden Punkten mit dem Satz des Phytagoras ermitteln.

Die Geradengleichung der Abstandsgerade a lautet in der Punkt-Steigungs-Form:

$$a : y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$

$$\iff y-2 = -\frac{3}{4}\cdot(x-8) \iff y = -\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}\cdot 8+2 \iff y = -\frac{3}{4}x+6+2 \iff y = -\frac{3}{4}x+8$$

Am Schnittpunkt P_x gilt durch Gleichsetzung der y-Werte von a und g:

$$\frac{4}{3}x - \frac{1}{3} = -\frac{3}{4}x + 8$$

$$\iff \frac{4}{3}x+\frac{3}{4}x = 8+\frac{1}{3} \iff \frac{16}{12}x+\frac{9}{12}x = \frac{24}{3}+\frac{1}{3} \iff \frac{25}{12}x = \frac{25}{3} \iff x = \frac{25}{3}\cdot\frac{12}{25} \iff x = 4$$

Einsetzen von x in beide Geradengleichungen muß das selbe y ergeben:

$$g : y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3} \iff y = \frac{4}{3} \cdot 4 - \frac{1}{3} \iff y = \frac{16}{3} - \frac{1}{3} \iff y = \frac{15}{3} \iff y = 5$$

$$a : y = -\frac{3}{4}x + 8 \iff y = -\frac{3}{4} \cdot 4 + 8 \iff y = -\frac{12}{4} + 8 \iff y = -3 + 8 \iff y = 5$$

Der gesuchte Schnittpunkt P_x der Geraden g und a ist $P_x(4|5)$.

Nachdem die Kordinaten der Punkte $P(8|2)$ und $P_x(4|5)$ bekannt sind, lässt sich die Entfernung zwischen beiden leicht mit dem Satz des Phytagoras errechnen. Die direkte, aber schräge Verbindung zwischen beiden Punkten entspricht nämlich der Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten parallel zur x-Achse und zur y-Achse verlaufen. Die Längen dieser genau wie die Achsen des karthesischen Koordinatensystems einen rechten Winkel bildenden Katheten entsprechen den Differenzen zwischen den x- und y-Koordinaten der beiden Punkte.

$$a = \Delta x = 8 - 4 = 4 \qquad b = \Delta y = 5 - 2 = 3$$

Nach dem Satz des Phytagoras entspricht das Quadrat über der Hypothenuse c der Summe der Kathetenquadrate a + b. Die Länge der Hypothenuse ergibt sich daher aus der Wurzel aus der Summe der Kathetenquadrate.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

Der Abstand zwischen dem vorgegebenen Punkt $P(8|2)$ und nächstgelegenen Punkt $P_x(4|5)$ auf der vorgegebenen Geraden beträgt also genau 5 Einheiten.