Potenzen und Wurzeln

Anna Heynkes

18.6.2006, Aachen

Dieser Text soll zusammenfassen und erklären, wie Potenzen und Wurzeln zusammenhängen und wie man mit ihnen rechnet.

Inhaltsverzeichnis

1 Die Potenzgesetze für ganzzahlige Exponenten

Ich wiederhole noch einmal die Potenzgesetze für ganzzahlige Exponenten, weil sie die Basis für die folgenden Erweiterungen einschließlich der Wurzelgesetze sind.

Für die folgenden Rechenregeln gilt:

$$a, b \in \mathbb{R}; \quad a, b \neq 0; \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man ihre Exponenten addiert.

(P1): $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man ihre Exponenten subtrahiert.

(P1*): $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Potenzen mit gleichen Exponenten werden multipliziert, indem man ihre Basen unter dem gemeinsamen Exponenten multipliziert.

(P2): $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$

Potenzen mit gleichen Exponenten werden dividiert, indem man ihre Basen unter dem gemeinsamen Exponenten dividiert.

(P2*): $\frac{a^m}{b^m} = (\frac{a}{b})^m$

Potenzen werden potenziert, indem man die Exponenten multipliziert.

(P3): $(a^m)^n = a^{(m \cdot n)}$

2 Wurzeln

2.1 Quadratwurzel

Meistens ist eigentlich die Quadratwurzel gemeint, wenn vereinfachend von einer Wurzel die Rede ist. In Wirklichkeit ist aber die Quadratwurzel nur ein besonders einfacher Spezialfall des allgemeineren mathematischen Begriffes Wurzel. Unter der Quadratwurzel einer Zahl a versteht man die Zahl x, die mit sich selbst multipliziert die Zahl a ergibt. Die Gleichung $\sqrt{a} = x$ ist also eine Umkehrung der Gleichung $x^2 = a$. Die Quadratwurzel aus 9 ist 3, weil 3 mit sich selbst multipliziert 9 ergibt.

2.2 Verallgemeinerung der Quadratwurzel

Analog zur zweiten oder Quadratwurzel kann man auch die sogenannte Kubikwurzel oder dritte Wurzel einer Zahl a ermitteln, indem man die Zahl x sucht, die dreimal mit sich selbst multipliziert a ergibt. Die Gleichung $\sqrt[3]{a} = x$ ist also eine Umkehrung der Gleichung $x^3 = a$. Die Kubikwurzel aus 8 ist 2, denn $2 \times 2 \times 2$ oder 2^3 ergibt 8.

Unter einer n-ten Wurzel von a ($\sqrt[n]{a} = x$ mit $n \geq 2$) versteht man eine nichtnegative Zahl x, die mit n potenziert die Zahl a ergibt ($x^n = a$). Dabei nennt man das n Wurzelexponent, das „a" heißt Radikand und das „x" ist einfach der Wert der Wurzel. Wenn eine Lösung innerhalb der rationalen Zahlen $\mathbb{R}$ möglich sein soll, muß bei Wurzeln mit geraden Wurzelexponenten der Radikand positiv sein, da ein geradzahliges Vielfaches einer rationalen Zahl nicht negativ sein kann.

2.3 Das Verhältnis von Wurzeln zu Potenzen

Das Ziehen von Wurzeln ist eine von zwei möglichen Umkehrungen des Potenzierens. Wenn a die n-te Potenz von x ist ($x^n = a$), dann ist umgekehrt x die n-te Wurzel aus a ($\sqrt[n]{a} = x$). Man kann auch sagen, daß $\sqrt[n]{a} = x$ eine der drei möglichen Auflösungen der Gleichung $x^n = a$ ist. Das Ziehen der n-ten Wurzel wird durch ein Potenzieren mit n rückgängig gemacht (($\sqrt[n]{a})^n = a = \sqrt[n]{a^n}$).

Das Umkehrungsverhältnis von Potenzen und Wurzeln kommt auch dadurch zum Ausdruck, dass man $\sqrt[n]{a}$ auch als $a^{\frac{1}{n}}$ schreiben kann. Die gegenseitige Aufhebung von Potenzen und Wurzeln macht dies noch deutlicher: $(\sqrt[n]{a})^n = (a^{\frac{1}{n}})^n = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a \ \ (a \geq 0)$

2.4 Irrationale Wurzelwerte

Nicht alle Wurzeln haben Lösungen im Bereich der rationalen Zahlen $\mathbb{R}$. Zum Beispiel ist die dritte Wurzel aus 2 ($\sqrt[3]{2}$) keine rationale, sondern eine irrationale Zahl. Es gibt nämlich keine aus ganzen Zahlen darstellbare Bruchzahl ($\frac{m}{n}, \ m, n \in \mathbb{N}$), die genau $\sqrt[3]{2}$ entspräche. Ansonsten würde gelten: $\frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n} = \frac{m^3}{n^3} = 2$. Demnach müsste m^3 genau doppelt so groß wie n^3 sein, sodaß sich der Bruch $\frac{m^3}{n^3}$ zu $\frac{2}{1}$ kürzen lassen müsste. Es gibt aber keine natürliche Zahl m, deren dritte Potenz 2 ergibt.

2.5 Lösungsmengen

Eine Lösungsmenge ist die Menge aller möglichen Lösungen einer Gleichung. Die Lösungsmenge der Gleichung $x^n = a$ kann 2, 1 oder kein Element enthalten, wenn a zu den rationalen Zahlen $\mathbb{R}$ gehört und n gerade ist:

Für $a > 0$ gibt es die Lösungen $x = \sqrt[n]{a}$ und $x = -\sqrt[n]{a}$.	$L = \{\sqrt[n]{a}, -\sqrt[n]{a}\}$
Für $a = 0$ ist $x = \sqrt[n]{0} = 0$ die Lösung.	$L = \{0\}$
Für $a < 0$ gibt es keine Lösung.	$L = \{\}$.

Jede Gleichung der Form $x^n = a$ hat genau eine Lösung, die Lösungsmenge also nur jeweils ein Element, wenn a zu den rationalen Zahlen $\mathbb{R}$ gehört und n ungerade ist:

Für $a > 0$ ist $x = \sqrt[n]{a}$ die Lösung.	$L = \{\sqrt[n]{a}\}$
Für $a = 0$ ist $x = \sqrt[n]{0}$ die Lösung.	$L = \{0\}$
Für $a < 0$ ist $x = -\sqrt[n]{\lvert a\rvert}$ die Lösung.	$L = \left\{-\sqrt[n]{\lvert a\rvert}\right\}$.

Die letzte Zeile macht deutlich, dass der Radikand nicht negativ werden darf. Man zieht deshalb das Minus vor die Wurzel und rechnet mit dem Betrag von a. Das funktioniert aber nur bei ungeraden Exonenten ($x^n = a$) bzw. Wurzelexponenten ($x = \sqrt[n]{a}$), weil bei geradem n das negative Vorzeichen aufgehoben würde. Aus diesem Grund gibt es auch keine Lösung, wenn der Wurzelexponent gerade ist.

2.6 Gebrochen rationale Exponenten

Wie in Abschnitt 2.3 auf Seite 2 bereits kommentarlos benutzt, läßt sich der Potenzbegriff auf gebrochen rationale Exponenten ausweiten.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \tag{1}$$

Dies gilt zumindest für $m \in \mathbb{Z},\ \ n \in \mathbb{N},\ \ a > 0$

Daraus folgt auch, daß man den Wurzelexponenten gegen den Exponenten des Radikanden kürzen kann. Wenn $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, dann gilt für $a > 0,\ \ m, p \in \mathbb{Z},\ \ n, q \in \mathbb{N}$:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[q]{a^p} \tag{2}$$

Wäre a nicht positiv, dann könnte die Erweiterbarkeit von Exponenten zu Widersprüchen führen:

$$-2 = \sqrt[3]{-8} = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$$

3 Die Potenzgesetze für rationale Exponenten

Bereits in Kapitel 2.3 auf der vorherigen Seite wurde zur Erklärung des Verhältnisses von Potenzen und Wurzeln einfach eine Potenz mit rationalem Exponenten ($a^{\frac{m}{n}}$) eingeführt und in 2.6 wurde schon damit gearbeitet. Offenbar gelten also die Potenzgesetze auch für rationale Exponenten. Für die folgenden Rechenregeln gilt jetzt nur noch, daß die Exponenten r und s rationale Zahlen und die Basen a und b positive rationale Zahlen sein müssen:

$$a, b, r, s \in \mathbb{R}; \qquad a, b > 0$$

Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man ihre Exponenten addiert.

(P1): $\quad a^r \cdot a^s = a^{r+s}$

Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man ihre Exponenten subtrahiert.

(P1*): $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$

Potenzen mit gleichen Exponenten werden multipliziert, indem man ihre Basen unter dem gemeinsamen Exponenten multipliziert.

(P2): $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$

Potenzen mit gleichen Exponenten werden dividiert, indem man ihre Basen unter dem gemeinsamen Exponenten dividiert.

(P2*): $\frac{a^r}{b^r} = (\frac{a}{b})^r$

Potenzen werden potenziert, indem man die Exponenten multipliziert.

(P3): $(a^r)^s = a^{(r \cdot s)}$

4 Wurzelgesetze

Zwei Wurzeln mit gleichem Wurzelexponenten werden multipliziert, indem man die beiden Radikanden unter einer gemeinsamen Wurzel (mit dem gemeinsamen Wurzelexponenten) multipliziert.

(W2): $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ für $a \geq 0, b \geq 0$

Zwei Wurzeln mit gleichem Wurzelexponenten werden dividiert, indem man die beiden Radikanden unter einer gemeinsamen Wurzel (mit dem gemeinsamen Wurzelexponenten) dividiert.

(W2∗): $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ für $a \geq 0, b \geq 0$

Besteht der Radikand einer Wurzel aus einer Wurzel, dann kann man die beiden Wurzeln durch Multiplikation der beiden Wurzelexponenten zu nur noch einer Wurzel vereinigen.

(W3): $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$ für $a \geq 0$

5 Wichtige Umkehrungen der Wurzelgesetze

Oft ist es notwendig, die Wurzelgesetze umgekehrt anzuwenden. Zum Beispiel kann man das Wurzelgesetz W2 umkehren und den Radikanden so in zwei Faktoren zerlegen, daß man aus einem der beiden Faktoren leicht die Wurzel ziehen kann ($\sqrt[n]{a^n \cdot b} = a \cdot \sqrt[n]{b}$). Zweckmäßig kann auch eine Zerlegung des Wurzelexponenten sein, wenn sich einer der beiden Faktoren gegen einen Exponenten unter der Wurzel kürzen lässt ($\sqrt[m \cdot n]{a^n} = \sqrt[m]{a}$). Manchmal ist es auch sinnvoll, den Bruch unter einer Wurzel so zu erweitern, daß man insbesondere aus dem Nenner die Wurzel ziehen kann ($\sqrt[2]{\frac{a}{b}} = \sqrt[2]{\frac{a \cdot b}{b \cdot b}} = \frac{\sqrt[2]{a \cdot b}}{b}$).