Hausaufgaben zu Geradengleichungen

Anna Heynkes

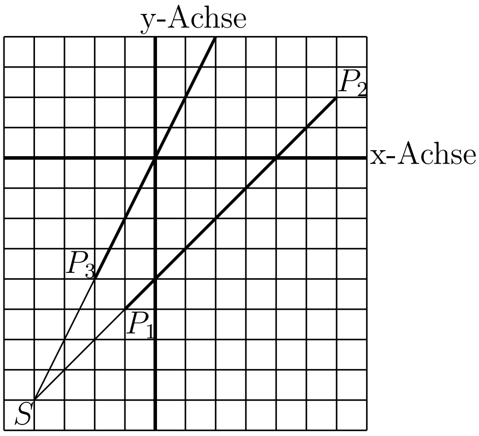
28.9.2005, Aachen

Dieser Text vereinigt weitere Hausaufgaben zum Thema Geradengleichungen.

Inhaltsverzeichnis

1 Hausaufgabe 1 vom 23.9.2005

Abbildung 1: Skizze mit gegebenen und gesuchten Punkten und Geraden



Gegeben waren die Punkte $P_1(-1|-5)$ und $P_2(6|2)$ als Punkte einer Geraden g_1 und eine Gerade g_2 mit dem Punkt $P_3(-2|-4)$ und der Steigung m = 2.

Bestimmt werden sollten der Schnittpunkt beider Geraden und der Abstand des Schnittpunktes vom Koordinatenursprung.

Lösungsstrategie:

Die Gerade g_1 lässt sich durch eine Geradengleichung in der Zwei-Punkte-Form darstellen während die Gerade g_2 mit einer Geradengleichung der Punkt-Steigungsform definiert werden kann. Den Schnittpunkt beider Geraden erhält man durch Gleichsetzung beider nach y aufgelöster Geradengleichungen, weil diese am Schnittpunkt identische x- und y-Werte besitzen. So erhält man die gemeinsame x-Koordinate, die man dann in die beiden Geradengleichungen einsetzen kann. Dadurch lässt sich auch der dazu gehörige y-Wert berechnen. Der Abstand des Schnittpuntes vom Koordinatenursprung entspricht nach dem Satz des Phytagoras einfach der Wurzel aus den Quadraten seiner Koordinaten.

Durchführung:

Nach Einsetzung der bekannten Koordinaten der gegebenen Punkte $P_1(-1|-5)$ und $P_2(6|2)$ in die Zwei-Punkte-Form

$$g : y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

erhält man vereinfachte Geradengleichungen in der Normalform:

$$g_1 : y + 5 = \frac{2+5}{6+1}(x+1) \Longleftrightarrow y = \frac{7}{7}(x+1) - 5 \Longleftrightarrow y = x + 1 - 5 \Longleftrightarrow y = x - 4$$

Nach Einsetzung von Punkt P3(-2|-4) und Steigung m = 2 in die Punkt-Steigungsform

$$g : y - y_1 = m(x - x_1)$$

erhält man vereinfachte Geradengleichungen in der Normalform:

$$y + 4 = 2(x + 2) \Longleftrightarrow y = 2x + 4 - 4 \Longleftrightarrow y = 2x + 0$$

Weil die beiden Geraden g_1 und g_2 am Schnittpunkt den selben y-Wert besitzen, kann man beide Gleichungen gleichsetzen und den x-Wert ermitteln:

$$x - 4 = 2x + 0 \Longleftrightarrow -x = 4 \Longleftrightarrow x = -4$$

Einsetzen des x-Wertes in die beiden Geradengleichungen liefert die identischen y-Werte:

$$y = x - 4 \iff y = -4 - 4 \iff y = -8$$

$$y = 2x + 0 \iff y = 2 \cdot -4 \iff y = -8$$

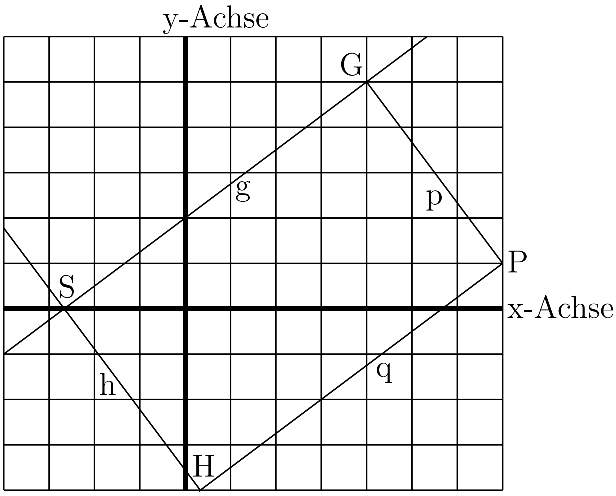
Demnach hat der Schnittpunkt der beiden Diagonalen die Koordinaten $P_s(-4|-8)$

Der Abstand a des Schnittpunktes $P_s(-4|-8)$ vom Koordinatenursprung (0|0) ist

$$a = \sqrt{-4^2 + (-8)^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 8,944$$

2 Hausaufgabe 2 vom 23.9.2005

Abbildung 2: Skizze mit allen gegebenen und gesuchten Punkten



Gegeben waren die Geradengleichung g: $y = \frac{3}{4}x + 2$ und ein Punkt $P(7|1)$.

Gesucht war zunächst in der Normalform die Geradengleichung einer Geraden h, die im Schnittpunkt der Geraden g und der x-Achse senkrecht auf der Geraden g steht. Außerdem sollten die Abstände zwischen beiden Geraden und dem Punkt P bestimmt werden.

Lösungsstrategie:

Bekannt sind von der Geraden h zunächst nur die Steigung m = -4/3 und die y-Koordinate 0 am Schnittpunkt S. Die zugehörige x-Koordinate erhält man durch Einsetzen der y-Koordinate in die Geradengleichung von g. Danach ist neben der Steigung auch ein Punkt bekannt. Deshalb bietet sich die Punkt-Steigungsform an, die zur Normalform umgeformt wird.

Da die Geraden g und h einen rechten Winkel bilden und die beiden Verbindungslinien zum Punkt P beide senkrecht auf ihnen stehen, bilden die vier Geraden ein Rechteck. Deshalb entsprechen die Steigungen und die Längen der Abstandslinien vom Punkt P zu den Geraden g und h genau den Steigungen und Längen der jeweils gegenüber liegenden Geraden. Um die Abstände des Punktes P zu den Geraden g und h zu ermitteln, muß man die Koordinaten deshalb nur entweder von Punkt G oder von Punkt H berechnen. Abgesehen von den krummen Werten der Koordinaten lassen sich dann die Abstände des Punktes P von den Geraden g und h leicht mit dem Satz des Pythagoras ermitteln.

Durchführung:

Einsetzung der y-Koordinaten in die gegebene Geradengleichung ergibt die zugehörige x-Koordinate:

$$y = \frac{3}{4}x + 2 \Longleftrightarrow 0 = \frac{3}{4}x + 2 \Longleftrightarrow -2 = \frac{3}{4}x \Longleftrightarrow x = -\frac{8}{3}$$

Eingesetzt in die Punkt-Steigungsform

$$h : y - y_1 = m(x - x_1)$$

ergibt sich mit der Steigung m $= -\frac{4}{3}$ und den Koordinaten des Schnittpunktes S $(-\frac{8}{3}|0)$

$$h : y - 0 = -\frac{4}{3}(x + \frac{8}{3})$$

Diese Geradengleichung für die Gerade h lässt sich leicht in die Normalform umwandeln:

$$h : y - 0 = -\frac{4}{3}(x + \frac{8}{3}) \Longleftrightarrow y = -\frac{4}{3}x - \frac{32}{9}$$

Die Steigung der Abstandslinie p entspricht genau der Steigung der Geraden h $(-\frac{4}{3})$. Da auch die Koordinaten des Punktes P $(7|1)$ bekannt sind, erhält man durch Einsetzen in die Punkt-Steigungsform:

$$g : y - y_1 = m(x - x_1)$$

nach Umformung eine vereinfachte Geradengleichung in der Normalform:

$$y - 1 = -\frac{4}{3}(x - 7) \Longleftrightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{4}{3} \cdot 7 + 1 \Longleftrightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{28}{3} + \frac{3}{3} \Longleftrightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{31}{3}$$

Am Schnittpunkt G sind die y-Werte der Geradengleichungen g und p identisch. Deshalb können die rechten Seiten der Gleichungen gleichgesetzt werden:

$$\frac{3}{4}x + 2 = -\frac{4}{3}x + \frac{31}{3} \Longleftrightarrow \frac{9}{12}x + \frac{16}{12}x = \frac{31}{3} - \frac{6}{3} \Longleftrightarrow \frac{25}{12}x = \frac{25}{3} \Longleftrightarrow x = 4$$

Eingesetzt in die beiden Geradengleichungen müssen sich identische y-Werte ergeben:

$$g : y = \frac{3}{4}x + 2 \Longleftrightarrow y = \frac{3}{4} \cdot 4 + 2 \Longleftrightarrow y = 3 + 2 \Longleftrightarrow y = 5$$

$$h : y = -\frac{4}{3}x + \frac{31}{3} \Longleftrightarrow y = -\frac{4}{3} \cdot 4 + \frac{31}{3} \Longleftrightarrow y = -\frac{16}{3} + \frac{31}{3} \Longleftrightarrow y = \frac{15}{3} \Longleftrightarrow y = 5$$

Die Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden g und p sind also G$(4|5)$.

Der Abstand p des Punktes P von der Geraden g entspricht dem Abstand der Punkte P$(7|1)$ und G$(4|5)$:

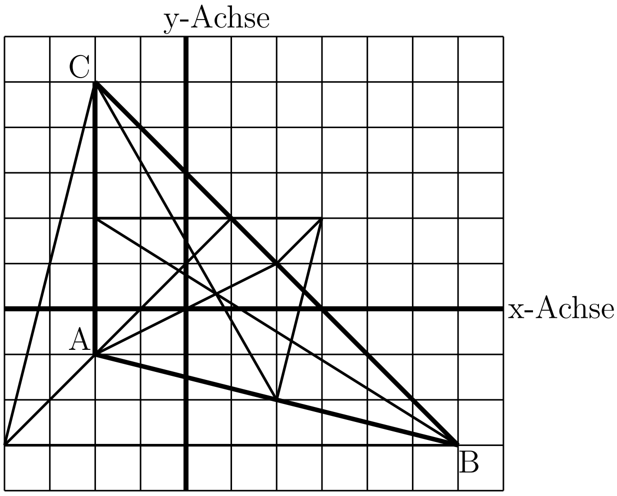
$$p = \sqrt{(7-4)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Der Abstand q des Punktes P von der Geraden h entspricht dem Abstand der Punkte G$(4|5)$ und S $(-\frac{8}{3}|0)$:

$$q = \sqrt{(\frac{12}{3} + \frac{8}{3})^2 + (5-0)^2} = \sqrt{(\frac{20}{3})^2 + (5)^2} = \sqrt{\frac{400}{9} + 25} = \sqrt{\frac{400}{9} + \frac{225}{9}} = \sqrt{\frac{625}{9}} = \frac{25}{3} = 8,\overline{3}$$

3 Hausaufgabe 3 vom 23.9.2005

Abbildung 3: Skizze mit allen gegebenen und gesuchten Punkten



Gegeben waren die Eckpunkte eines Dreiecks A(-2|-1), B(6|-3) und C(-2|5).

Gesucht waren Gleichungen für die Seitenhalbierenden, Mittelsenkrechten und Höhengeraden. Außerdem sollte gezeigt werden, dass sich jeweils alle drei Seitenhalbierenden, Mittelsenkrechten und Höhengeraden in einem Punkt schneiden.

Außerdem sollten Umfang und Fläche des Dreiecks berechnet und gezeigt werden, dass sich die jeweils drei zu konstruierenden Geraden in einem Punkt schneiden.

3.1 Seitenhalbierende

Lösungsstrategie:

Um eine Seitenhalbierende beschreiben zu können, braucht man außer einem Eckpunkt auch den Mittelpunkt der gegenüber liegenden Dreiecksseite. Im Prinzip findet man diesen, indem man abzählt, wieviele Einheiten in x- und y-Richtung man sich bewegen muss[1], um vom einen zum anderen Eckpunkt der Dreiecksseite zu gelangen. Bewegt man sich stattdessen nur um genau die Hälfte der abgezählten Einheiten in x- und y-Richtung, dann landet man auf der Mitte der Geraden, welche die beiden Eckpunkte verbindet. Anstatt abzuzählen, kann man auch die Differenzen der x- und y-Koordinaten bilden und diese Differenzen dann halbieren. Dann geht man von einem der beiden Eckpunkte genau um diese halbierten Differenzen der Eckpunkt-Koordinaten in Richtung auf den anderen Eckpunkt. Man muss dann nur darauf achten, dass man immer den kleineren Wert vom größeren abzieht und die halbierte Differenz zum kleineren Wert hinzu addiert oder vom größeren abzieht. Es gibt aber auch eine einfachere Methode der Bestimmung des Mittelpunktes. Dazu bildet man die Summe der x-Koordinaten sowie die Summe der y-Koordinaten und teilt beide durch 2. Das Ergebnis sind die absoluten Koordinaten des Mittelpunkte der durch die beiden Punkte definierten Geraden. Verwechslungsprobleme gibt es deshalb bei dieser Methode nicht.

Beweis: Weil die Abstände zwischen Mittelpunkt M und beiden Eckpunkten A und B sowie die Steigungen beider Teilgeraden identisch sind, gilt:

[1] Man stelle sich vor, dass man sich in einem karthesischen Koordinatensystem nicht schräg, sondern immer nur in x- oder y-Richtung bewegen kann, um ein Ziel zu erreichen.

$$x_M - x_A = x_B - x_M \qquad\qquad y_M - y_A = y_B - y_M$$

$$\Longleftrightarrow 2 \cdot x_M = x_A + x_B \qquad\qquad \Longleftrightarrow 2 \cdot y_M = y_A + y_B$$

$$\Longleftrightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad\qquad \Longleftrightarrow y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Mit den so gewonnenen Mittelpunkt-Koordinaten und denen des gegebenen Eckpunktes lässt sich mittels Geradengleichung in der Zwei-Punkte-Form die Seitenhalbierende darstellen.

Das sich alle drei Seitenhalbierenden in einem Punkt schneiden, lässt sich durch Gleichsetzen der rechten Seiten von jeweils zwei nach y aufgelösten Geradengleichungen zeigen. Es muß in beiden Fällen der selbe x-Wert heraus kommen. Nach Einsetzen dieses x-Wertes in die drei Geradengleichungen muß auch der y-Wert immer der selbe sein.

Durchführung:

Die Koordinaten des Mittelpunktes $H_{\overline{AB}}$ zwischen A und B sind (2|-2):

$$x = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-2+6}{2} = \frac{4}{2} = 2 \qquad\qquad y = \frac{y_A - y_B}{2} = \frac{-1+(-3)}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Die Koordinaten des Punktes $H_{\overline{BC}}$ zwischen B und C sind (2|1):

$$x = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{6+(-2)}{2} = \frac{4}{2} = 2 \qquad\qquad y = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{(-3)+5}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Die Koordinaten des Punktes $H_{\overline{CA}}$ zwischen C und A sind (-2|2):

$$x = \frac{x_C + x_A}{2} = \frac{(-2)+(-2)}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \qquad\qquad y = \frac{y_C + y_A}{2} = \frac{5+(-1)}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Nun sind von jeder Seitenhalbierenden beide Endpunkte bekannt und können in die Geradengleichung in der Zwei-Punkte-Form

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$$

eingesetzt werden. Danach werden diese Gleichungen zur Normalform vereinfacht.

Die Seitenhalbierende $h_{\overline{AB}}$ wird definiert durch die Punkte C(-2|5) und $H_{\overline{AB}}(2|-2)$:

$$y-5 = \frac{-2-5}{2+2}\cdot(x+2) \Longleftrightarrow y = \frac{-7}{4}\cdot(x+2)+5 \Longleftrightarrow y = \frac{-7}{4}\cdot x - \frac{14}{4}+5 \Longleftrightarrow y = -\frac{7}{4}\cdot x + 1,5$$

Die Seitenhalbierende $h_{\overline{BC}}$ wird definiert durch die Punkte A(-2|-1) und $H_{\overline{BC}}(2|1)$:

$$y+1 = \frac{1+1}{2+2}\cdot(x+2) \Longleftrightarrow y = \frac{1}{2}\cdot(x+2)-1 \Longleftrightarrow y = \frac{1}{2}\cdot x + 1 - 1 \Longleftrightarrow y = \frac{1}{2}\cdot x + 0$$

Die Seitenhalbierende $h_{\overline{CA}}$ wird definiert durch die Punkte B(6|-3) und $H_{\overline{CA}}(-2|2)$:

$$y+3 = \frac{2+3}{-2-6}\cdot(x-6) \Longleftrightarrow y = \frac{5}{-8}\cdot(x-6)-3 \Longleftrightarrow y = -\frac{5}{8}\cdot x + \frac{15}{4} - \frac{12}{4} \Longleftrightarrow y = -\frac{5}{8}\cdot x + \frac{3}{4}$$

Gleichsetzung der rechten Seiten von jeweils zwei nach y aufgelösten Geradengleichungen sollte gleiche x-Werte ergeben:

$$-\frac{7}{4}\cdot x+1,5=\frac{1}{2}\cdot x+0 \Longleftrightarrow -\frac{7}{4}\cdot x-\frac{1}{2}\cdot x=0-1,5 \Longleftrightarrow -\frac{9}{4}\cdot x=-\frac{6}{4} \Longleftrightarrow x=\frac{6}{4}\cdot\frac{4}{9} \Longleftrightarrow x=\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{2}\cdot x+0=-\frac{5}{8}\cdot x+\frac{3}{4} \Longleftrightarrow \frac{1}{2}\cdot x+\frac{5}{8}\cdot x=\frac{3}{4}-0 \Longleftrightarrow \frac{9}{8}\cdot x=\frac{3}{4} \Longleftrightarrow x=\frac{2}{3}$$

$$-\frac{5}{8}\cdot x+\frac{3}{4}=-\frac{7}{4}\cdot x+1,5 \Longleftrightarrow (\frac{14}{8}-\frac{5}{8})\cdot x=\frac{6}{4}-\frac{3}{4} \Longleftrightarrow \frac{9}{8}\cdot x=\frac{3}{4} \Longleftrightarrow x=\frac{2}{3}$$

Nach Einsetzen dieses x-Wertes in die drei Geradengleichungen muß auch der y-Wert immer der selbe sein.

$$y=-\frac{7}{4}\cdot x+1,5 \Longleftrightarrow y=-\frac{7}{4}\cdot\frac{2}{3}+1,5 \Longleftrightarrow y=-\frac{14}{12}+\frac{18}{12} \Longleftrightarrow y=\frac{1}{3}$$

$$y=\frac{1}{2}\cdot x+0 \Longleftrightarrow y=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+0 \Longleftrightarrow y=\frac{1}{3}$$

$$y=-\frac{5}{8}\cdot x+\frac{3}{4} \Longleftrightarrow y=-\frac{5}{8}\cdot\frac{2}{3}+\frac{3}{4} \Longleftrightarrow y=-\frac{10}{24}+\frac{18}{24} \Longleftrightarrow y=\frac{8}{24} \Longleftrightarrow y=\frac{1}{3}$$

Demnach schneiden sich alle Seitenhalbierenden bei den Koordinaten $(\frac{2}{3}|\frac{1}{3})$.

3.2 Mittelsenkrechte

Lösungsstrategie:

Mittelsenkrechte nennt man eine Gerade, die im rechten Winkel auf dem Mittelpunkt einer anderen Geraden steht. Die Mittelpunkte der drei Seiten des Dreiecks wurden bereits im ersten Teil dieser Aufgabe berechnet. Die Steigungen der senkrecht auf den Dreiecksseiten stehenden Mittelsenkrechten entsprechen den negativen Kehrwerten der Steigungen dieser Dreiecksseiten. Die Steigungen der Dreiecksseiten lassen sich mit Hilfe der Dreieckseckpunkte ermitteln. Definieren lassen sich daher die Mittelsenkrechten durch Geradengleichungen in der Punkt-Steigungs-Form.

Das sich alle drei Mittelsenkrechten in einem Punkt schneiden, lässt sich durch Gleichsetzen der rechten Seiten von jeweils zwei nach y aufgelösten Geradengleichungen zeigen. Es muß in beiden Fällen der selbe x-Wert heraus kommen. Nach Einsetzen dieses x-Wertes in die drei Geradengleichungen muß auch der y-Wert immer der selbe sein.

Durchführung:

Die Steigung der Dreiecksseite $g_{\overline{AB}}$ beträgt:

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{-1+3}{-2-6}=\frac{2}{-8}=-\frac{1}{4}$$

Die Steigung der senkrecht auf dieser Dreiecksseite stehenden Mittelsenkrechten beträgt demnach $\frac{4}{1}=4$. Der Ausgangspunkt der auf der Seite $g_{\overline{AB}}$ stehenden Mittelsenkrechten hat die Koordinaten (2|-2). Durch eine Geradengleichung der Punkt-Steigungs-Form:

$$y-y_1=m\cdot(x-x_1)$$

lässt sich daher diese Mittelsenkrechte charakterisieren:

$$y + 2 = 4 \cdot (x - 2) \Longleftrightarrow y = 4x - 8 - 2 \Longleftrightarrow y = 4x - 10$$

Die Steigung der Dreiecksseite $g_{\overline{BC}}$ beträgt:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{-3 - 5}{6 + 2} = \frac{-8}{8} = -1$$

Die Steigung der senkrecht auf dieser Dreiecksseite stehenden Mittelsenkrechten beträgt demnach 1. Der Ausgangspunkt der auf der Seite $g_{\overline{BC}}$ stehenden Mittelsenkrechten hat die Koordinaten (2|1). Durch eine Geradengleichung der Punkt-Steigungs-Form:

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$

lässt sich daher diese Mittelsenkrechte charakterisieren:

$$y - 1 = 1 \cdot (x - 2) \Longleftrightarrow y = x - 2 + 1 \Longleftrightarrow y = x - 1$$

Die Steigung der Dreiecksseite $g_{\overline{CA}}$ beträgt:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{5 + 1}{-2 + 2} = \frac{6}{0}$$

Eine 0 im Nenner ist nicht definiert, aber die Koordinaten der Punkte A und C stehen erkennbar direkt übereinander. Die Dreiecksseite $g_{\overline{CA}}$ steht also senkrecht. Daher muss die im rechten Winkel darauf stehende Mittelsenkrechte waagerecht liegen. Dies entspricht einer Steigung von 0. Der Ausgangspunkt der auf der Seite $g_{\overline{CA}}$ stehenden Mittelsenkrechten hat die Koordinaten (-2|2). Durch eine Geradengleichung der Punkt-Steigungs-Form:

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$

lässt sich daher diese Mittelsenkrechte charakterisieren:

$$y - 2 = 0 \cdot (x + 2) \Longleftrightarrow y = 2$$

Weil bei der Mittelsenkrechten auf der Dreiecksseite $g_{\overline{CA}}$ y überall den Wert 2 hat, müsste auch an einem gemeinsamen Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten die y-Koordinate den Wert 2 besitzen. Falls es diesen gemeinsamen Schnittpunkt gibt, dann muss das Einsetzen des y-Wertes 2 in die beiden anderen Geradengleichungen auch den selben x-Wert ergeben.

$$y = 4x - 10 \Longleftrightarrow 2 = 4x - 10 \Longleftrightarrow 12 = 4x \Longleftrightarrow x = 3$$

$$y = x - 1 \Longleftrightarrow 2 = x - 1 \Longleftrightarrow x = 3$$

Die drei Mittelsenkrechten besitzen also tatsächlich einen gemeinsamen Schnittpunkt (3|2).

3.3 Höhengeraden

Lösungsstrategie:

Eine Höhengerade eines Dreiecks ist eine senkrecht auf einer Seite stehende Gerade zum gegenüber liegenden Eckpunkt. Von den Höhengeraden sind der jeweilige Eckpunkt des Dreiecks gegeben und die Steigung entspricht der in Aufgabe 3.2 auf Seite 6 berechneten Steigung der auf der gegenüber liegenden Dreiecksseite stehenden Mittelsenkrechten. Diesen Werte müssen daher nur noch in Geradengleichungen der Punkt-Steigungs-Form eingesetzt werden. Dann lassen sich diese Geradengleichungen zur Normalform auflösen, und man kann wie zuvor den Schnittpunkt bestimmen.

Durchführung:

Eine Höhengerade verläuft vom Dreieckseckpunkt A(-2|-1) zur Dreiecksseite $g_{\overline{BC}}$ mit der Steigung 1. Daraus ergibt sich in der Punkt-Steigungs-Form die zur Normalform auflösbare Geradengleichung:

$$y + 1 = 1 \cdot (x + 2) \iff y = x + 2 - 1 \iff y = x + 1$$

Eine Höhengerade verläuft vom Dreieckseckpunkt B(6|-3) zur Dreiecksseite $g_{\overline{AC}}$ mit der Steigung 0. Daraus ergibt sich in der Punkt-Steigungs-Form die zur Normalform auflösbare Geradengleichung:

$$y + 3 = 0 \cdot (x - 6) \iff y = -3$$

Eine Höhengerade verläuft vom Dreieckseckpunkt C(-2|5) zur Dreiecksseite $g_{\overline{AB}}$ mit der Steigung 4. Daraus ergibt sich in der Punkt-Steigungs-Form die zur Normalform auflösbare Geradengleichung:

$$y - 5 = 4 \cdot (x + 2) \iff y = 4x + 8 + 5 \iff y = 4x + 13$$

Weil die Höhengerade vom Eckpunkt B überall den y-Wert -3 hat, müsste auch an einem gemeinsamen Schnittpunkt der drei Höhengeraden die y-Koordinate den Wert -3 besitzen. Falls es diesen gemeinsamen Schnittpunkt gibt, dann muss das Einsetzen des y-Wertes -3 in die beiden anderen Geradengleichungen auch den selben x-Wert ergeben.

$$y = x + 1 \iff -3 = x + 1 \iff -4 = x \iff x = -4$$

$$y = 4x + 13 \iff -3 = 4x + 13 \iff -16 = 4x \iff x = -4$$

Nach Einsetzen dieses x-Wertes in die drei Geradengleichungen muss auch der y-Wert immer der selbe sein.

$$y = x + 1 \iff y = -4 + 1 \iff y = -3$$

$$y = 4x + 13 \iff y = 4 \cdot -4 + 13 \iff y = -16 + 13 \iff y = -3$$

Die 3 Höhengeraden besitzen also tatsächlich den gemeinsamen Schnittpunkt (-4|-3).

3.4 Umfang und Fläche des Dreiecks

Der Umfang U des Dreiecks entspricht der Summe der drei Geraden zwischen den Dreieckseckpunkten A(-2|-1), B(6|-3) und C(-2|5). Die Länge jeder Dreiecksseite wird mit dem Satz des Pythagoras berechnet:

$$U = g_{\overline{AB}} + g_{\overline{BC}} + g_{\overline{CA}}$$

$$= \sqrt{(x_{\overline{A}} - x_{\overline{B}})^2 + (y_{\overline{A}} - y_{\overline{B}})^2} + \sqrt{(x_{\overline{B}} - x_{\overline{C}})^2 + (y_{\overline{B}} - y_{\overline{C}})^2} + \sqrt{(x_{\overline{C}} - x_{\overline{A}})^2 + (y_{\overline{C}} - y_{\overline{A}})^2}$$

$$= \sqrt{(-2-6)^2 + (-1+3)^2} + \sqrt{(6+2)^2 + (-3-5)^2} + \sqrt{(-2+2)^2 + (5+1)^2}$$

$$= \sqrt{(-8)^2 + 2^2} + \sqrt{8^2 + (-8)^2} + \sqrt{0^2 + 6^2}$$

$$= \sqrt{64+4} + \sqrt{64+64} + \sqrt{0+36}$$

$$= \sqrt{68} + \sqrt{128} + \sqrt{36}$$

$$= \sqrt{4} \cdot \sqrt{17} + \sqrt{16} \cdot \sqrt{8} + 6$$

$$= 2\sqrt{17} + 4\sqrt{8} + 6$$

$$= 2 \cdot 4,123 + 4 \cdot 2,828 + 6$$

$$= 8,246 + 11,314 + 6 = 25,56 \;\; Einheiten$$

Die Fläche F eines Dreiecks kann man nach der Formel 0,5 · Grundfläche · Höhe berechnen. Eine Grundfläche des Dreiecks entspricht der Differenz der y-Werte der Punkte A und C $(5+1=6)$. Die dazu gehörende Höhe entspricht der Differenz der x-Werte der Punkte A und B $(6+2=8)$.

$$F = 0,5 \cdot 6 \cdot 8 = 24 \;\; Einheiten^2$$