Der Dreisatz

Roland Heynkes

23. Dezember 2005, Aachen

Der Dreisatz ist ein seltsames Phänomen. Einerseits ist er ganz einfach, aber andererseits bereitet er vielen Schülern und Eltern Probleme. Einerseits gehören Dreisatz-Aufgaben zu den häufigsten Anwendungen der Mathematik im täglichen Leben, andererseits wendet aber kaum jemand den Dreisatz in der Form an, in welcher er in der Schule gelehrt wird. Sobald wir nämlich das Prinzip des Dreisatzes verstanden haben, erkennen wir seine Umständlichkeit und rechnen eleganter mit einer Quotienten-Gleichung. In gewisser Weise versteckt das schulische Vorgehen in drei Schritten sogar das Prinzip, nach dem beide Lösungswege funktionieren. Im Grunde ist nämlich der Dreisatz die Zerlegung des direkteren und flexibleren Lösungsweges in zwei Schritte in der Hoffnung, so werde die Sache für Kinder verständlicher. Vielleicht kommt man auch tastend zu diesem Lösungsweg, wenn man das Problem noch nicht vollständig verstanden hat. Besonders wenn man dieses starre Verfahren nur auswendig lernt und rein mechanisch anwendet, ist der Dreisatz nicht nur umständlich, sondern erschwert meines Erachtens sogar das Verstehen und Erinnern des Lösungsweges.

Inhaltsverzeichnis

1 Ein einfaches Dreisatz-Problem **1**

1.1 Dreisatz wie ihn die Schule lehrt. 1

1.2 Abstraktion des Dreisatzes 1

2 Dreisatz mit drei Variablen **2**

2.1 Lösung mit dem klassischen Dreisatz 2

2.2 Formulierung des Problems als Gleichung von Verhältnissen 2

2.3 Allgemeine Formulierung des 3-Variablen-Problems 3

1 Ein einfaches Dreisatz-Problem

Eine typische Aufgabe für den Dreisatz ist folgendes Problem:

Ein Rezept verrät, dass man für zwei Personen 100 Gramm Mehl benötige. Man erwartet jedoch 5 Personen und fragt sich, wieviel Mehl man jetzt brauche.

1.1 Dreisatz wie ihn die Schule lehrt.

In der Schule schreibt man zunächst in einem ersten Satz auf, was man schon weiß:

1) 100 g reichen für 2 Personen.

Dann sollen Schüler den Mehlbedarf für eine Person ermitteln:

2) Für 1 Person sind $\frac{100g}{2} = 50g$ erforderlich.

Schließlich multipliziert man den in Satz 2 für eine Person errechneten Bedarf mit der Zahl der Personen, für die aktuell gekocht werden soll:

3) Für 5 Personen benötigt man $50g \cdot 5 = 250g$.

Der dritte Satz enthält bereits die Lösung.

1.2 Abstraktion des Dreisatzes

Der Dreisatz bietet einen sehr einfachen, schematischen Lösungsweg ohne Abstraktion und ohne Flexibilität. Er lädt daher nicht gerade dazu ein, über das Prinzip der Lösung nachzudenken. Genau das sollte man aber versuchen, um die Sache besser zu verstehen.

Man sollte vor allem sehen, dass im ersten Satz ein Verhältnis zwischen zwei Vergleichsgrößen gegeben wird. Wir haben eine Größe $x_v = 100g$ und eine Größe $y_v = 2$ Personen, aber auf diese Größen kommt es gar nicht an. Man könnte ebenso gut $x_v = 200g$ und $y_v = 4$ Personen vorgeben, denn festgelegt werden soll eigentlich nur ein Verhältnis zwischen diesen beiden Größen.

$$\frac{50g}{1 \text{ Person}} = \frac{100g}{2 \text{ Personen}} = \frac{150g}{3 \text{ Personen}} = \frac{200g}{4 \text{ Personen}} = \frac{x_v}{y_v}$$

Ebenso gut kann man auch den umgekehrten Quotienten beider Größen bilden.

$$\frac{1 \text{ Person}}{50g} = \frac{2 \text{ Personen}}{100g} = \frac{3 \text{ Personen}}{150g} = \frac{4 \text{ Personen}}{200g} = \frac{y_v}{x_v}$$

Aber wozu tun wir das überhaupt? Was bringt es uns, irgendein Verhältnis zwischen zwei Größen zu kennen? Nutzen können wir dieses Verhältnis dann, wenn zwei andere Größen x und y genau im selben Verhältnis zu einander stehen, der Betrag der einen der beiden Größen uns aber noch unbekannt ist. Wenn nämlich die Quotienten des bekannten (x_v, y_v) und des nur teilweise bekannten (x, y) Wertepaares gleich sind, dann kann man ein Gleichheitszeichen zwischen sie setzen. So erhält man eine Gleichung, die man nach der noch unbekannten Größe auflösen kann. Die beiden schon bekannten Größen x_v und y_v des Vergleichsverhältnisses helfen uns also, die unbekannte Größe x oder y zu berechnen.

$$\frac{y}{x} = \frac{y_v}{x_v} \Longleftrightarrow y = \frac{y_v}{x_v} \cdot x \qquad bzw. \qquad \frac{x}{y} = \frac{x_v}{y_v} \Longleftrightarrow x = \frac{x_v}{y_v} \cdot y$$

Wir können dies mit der konkreten Dreisatz-Aufgabe durchspielen.

$$\frac{x}{5\text{ Personen}} = \frac{100g}{2\text{ Personen}} \Longleftrightarrow x = \frac{100g \cdot 5\text{ Personen}}{2\text{ Personen}} \Longleftrightarrow x = \frac{5}{2} \cdot 100g \Longleftrightarrow x = 250g$$

Man sieht, dass der Umweg über den zweiten Satz des Dreisatzes überflüssig ist. Im klassischen Dreisatz würde man nämlich den Bruch auf der rechten Seite der Gleichung durch 2 kürzen, um im Nenner nur noch 1 Person stehen zu haben. Da sich dadurch der Quotient aber nicht ändert und es eigentlich nur auf den Quotienten ankommt, ist dieses Kürzen unnötig. Stattdessen haben wir beim Auflösen der Quotientengleichung die Freiheit, die Werte zu kürzen, bei denen dies besonders leicht ist und möglichst viel bringt.

Fragt man umgekehrt, für wieviele Personen 150 Gramm ausreichen, dann schreibt man geschickterweise der Verhältnis der Vergleichsgrößen einfach umgekehrt.

$$\frac{x}{150g} = \frac{2\text{ Personen}}{100g} \Longleftrightarrow x = \frac{150g}{100g} \cdot 2\text{ Pers.} \Longleftrightarrow x = \frac{3}{2} \cdot 2\text{ Pers.} \Longleftrightarrow x = 3\text{ Personen}$$

2 Dreisatz mit drei Variablen

In einem heißen Sommer verbrauchte eine vierköpfige Familie durchschnittlich dreieinhalb Kästen (je 12 Flaschen) Wasser pro Woche. Wieviele Flaschen hätten sie wohl verbraucht, wenn sie drei Tage lang Besuch von zwei Großeltern gehabt hätten?

2.1 Lösung mit dem klassischen Dreisatz

1. 4 Personen tranken in 7 Tagen 42 Flaschen.
2. - Das waren durchschnittlich 6 Flaschen pro Tag.
   - Umgerechnet auf eine Person waren es $6/4 = 1{,}5$ Flaschen pro Tag.
3. - 6 Personen hätten wohl 1,5 mal 6, also 9 Flaschen pro Tag verbraucht.
   - An drei Tagen wären das etwa 9 mal 3, also 27 Flaschen oder 2 Kästen und 3 Flaschen gewesen.

2.2 Formulierung des Problems als Gleichung von Verhältnissen

Eleganter ist auch in diesem Fall die Lösung dieses Problems, wenn man mit dem Verhältnis der gesuchten Größe Flaschen zu den bekannten Größen Personen und Tage rechnet.

$$\frac{\text{Flaschen}}{\text{Personen} \cdot \text{Tage}} = \text{konstant}$$

Dann lässt sich eine unbekannte Variable direkt durch die Gleichsetzung mit einem vollständig bekannten Verhältnis errechnen.

$$\frac{x}{6\text{ Personen} \cdot 3\text{ Tage}} = \frac{42\text{ Flaschen}}{4\text{ Personen} \cdot 7\text{ Tage}} \Longleftrightarrow x = \frac{6 \cdot 3}{4 \cdot 7} \cdot 42\text{ Flaschen}$$

$$\Longleftrightarrow x = \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot 6\text{ Flaschen} \Longleftrightarrow x = 9 \cdot 3\text{ Flaschen} \Longleftrightarrow x = 27\text{ Flaschen}$$

2.3 Allgemeine Formulierung des 3-Variablen-Problems

Wir können vom konkreten Beispiel abstrahieren und die darin verwendeten Größen durch Variablen ersetzen. Die auch auf der linken Seite der Gleichung bekannten Größen Personen und Tage werden in der algebraischen Form durch die Variablen x und y ersetzt. Die auf der linken Seite der Gleichung unbekannte Größe Flaschen ersetzen wir durch die Variable z. Nun müssen wir nur noch unterscheiden zwischen den bekannten und zur Festlegung des Verhältnisses benutzten Variablen x_v, y_v und z_v einerseits sowie den Variablen der Aufgabenstellung x, y und z andererseits. Damit das Auflösen nach der unbekannten Variablen z möglichst einfach wird, schreibt man das zu berechnende z am besten in den Zähler der linken Seite der Gleichung.

$$\frac{z}{x \cdot y} = \frac{z_v}{x_v \cdot y_v} \Longleftrightarrow z = \frac{x \cdot y}{x_v \cdot y_v} \cdot z_v$$

Ebenso gut erlauben die drei bekannten Größen x_v, y_v und z_v aber auch die Ermittlung eines unbekannten x oder y.

$$\frac{x}{y \cdot z} = \frac{x_v}{y_v \cdot z_v} \Longleftrightarrow x = \frac{y \cdot z}{y_v \cdot z_v} \cdot x_v$$

$$\frac{y}{x \cdot z} = \frac{y_v}{x_v \cdot z_v} \Longleftrightarrow y = \frac{x \cdot z}{x_v \cdot z_v} \cdot y_v$$

Es ist völlig egal, welchen Quotienten man aus den Variablen bildet. Sie müssen nur auf beiden Seiten der Gleichung im selben Verhältnis zueinander stehen.